

Influencia del tipo de elemento finito en perfiles laminares para el cálculo de esfuerzos y deformaciones



Colaboración

Miguel Alberto Domínguez Gurría; Ulises Augusto Jaen Rendon, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Fecha de recepción: 13 de agosto de 2021

Fecha de aceptación: 26 de abril de 2022

RESUMEN: En este trabajo se presenta un estudio comparativo de la influencia del tipo de elemento y el tamaño de malla para el cálculo de esfuerzos y deformaciones máximas en una viga en “voladizo” de sección rectangular mediante el método de elemento finito, teniendo como referencia resultados obtenidos mediante un análisis analítico, utilizando las ecuaciones para el caso particular de una viga en “voladizo”. Se compararon los resultados obtenidos empleando elementos sólidos continuos y tipo Shell 3D. Mostrando diferencias hasta de un 50% en el tiempo de cómputo ocasionado por el tipo de elemento, así como del tamaño de la malla utilizada, mientras que, los resultados de esfuerzos máximos para los elementos shell y sólidos presentan una diferencia del 5% y 13% respectivamente con respecto a los analíticos.

PALABRAS CLAVE: Elemento Finito, Elementos sólidos, Shell, Vigas.

ABSTRACT: In this work presents a comparative study of the influence of the type of element and mesh size for the calculation of maximum stresses and deformations in a cantilever beam of rectangular section by means of the finite element method, taking as reference results obtained by means of an analytical analysis, using the equations for the particular case of a cantilever beam. The results obtained using continuous solid elements and 3D Shell type were compared. Showing differences of up to 50% in the computation time caused by the type of element, as well as the size of the mesh used, while the results of maximum stresses for shell and solid elements show a difference of 5% and 13% respectively with respect to the analytical ones.

KEYWORDS: Finite element, solid element, Shell, beam.

INTRODUCCIÓN

El método de elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés) forma parte importante de la mecánica computacional y las matemáticas aplicadas, y ha sido ampliamente adoptado en la investigación científica y aplicaciones de ingeniería [1].

El método de elementos finitos es un método numérico para resolver problemas de ingeniería y física matemática [2]. Las áreas de problemas de interés que se resuelven con este método incluyen análisis estructural, transferencia de calor, flujo de fluidos, entre otros [2]. Para problemas que involucran geometrías, cargas y propiedades de materiales complejas, generalmente no es posible obtener soluciones matemáticas analíticas [3].

Desde hace muchos años, el método de elemento finito se considera un método numérico y matemático bien definido, para simular y analizar una gran variedad de problemas con distintas condiciones límites [4].

El método de elemento finito se considera versátil y ha encontrado aplicaciones en diversos problemas de índole ingenieril. En la actualidad, hay más de 100,000 ingenieros que utilizan dicho método [5].

El progreso del análisis de elementos finitos coincide directamente con la accesibilidad y asequibilidad de potentes arquitecturas de cálculo (ordenadores)

[6], siendo que, esta herramienta se utiliza cuando se trata de construcciones complejas (cuerpos), propiedades de los materiales, cargas aplicadas y restricciones, donde los resultados de la aproximación real no pueden ser realizados [6].

El procedimiento general al realizar un análisis de elemento finito puede dividirse en tres grupos principales: preprocesamiento, solución y post-procesamiento. El preprocesamiento abarca todas las condiciones de contorno, la selección y aplicación de materiales y la generación y modificación de la malla; también pueden aplicarse parámetros adicionales como la suavidad de la superficie, la interacción y la frecuencia, etc. La segunda es la solución de la tarea y puede describirse como la resolución de números no identificados del campo primario de variables. El último es el post-procesamiento del problema. El post-procesador comprende sofisticadas rutinas utilizadas para trazar gráficos e ilustrar los resultados [7].

En las últimas décadas, se han propuesto alternativas computacionales comerciales, para el apoyo de la resolución de problemas ingenieriles. Estos sistemas utilizan el método de elementos finitos en sus soluciones, con los cuales se desarrolla y evalúa el rendimiento y fiabilidad de los productos en la industria [8]. La precisión del resultado obtenido está determinada por el tamaño de la malla o de la discretización de los elementos, con un tamaño pequeño de elemento (mayor número de elementos) se obtiene una alta precisión en comparación con un tamaño grande (menor número de elementos) [9].

Hay muchos tipos diferentes de elementos utilizados en el análisis de elementos finitos. Estos elementos se desarrollan de forma independiente y varían de un software de elementos finitos a otro. En general, existen tres grupos de elementos: unidimensionales (1D), bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D). Lógicamente, todas las estructuras virtuales deben modelarse lo más cerca posible de la estructura real. Los analistas deben aprender cuándo pueden utilizarse otros tipos de elementos y son válidos para representar la estructura de ingeniería [10].

Dependiendo de la geometría, el modelo puede crearse utilizando diferentes tipos de elementos, como son los Carcasa o "Shell" y elementos sólidos, ambos "3D". Esto según sea conveniente para los análisis que se realizarán.

En este estudio, se aborda de forma analítica y numérica la deformación de una viga en voladizo sometida a flexión. Comparando el uso de elementos carcasa y sólidos para la resolución del sistema, con esto observar las diferencias entre los resultados y el tiempo de cómputo para cada análisis. El sistema se resuelve analíticamente calculando el valor máximo de desplazamiento. Este artículo proporcionará información fundamental relativa a al-

gunos de los elementos finitos utilizados en el modelado por el software comercial, sin embargo, no puede incluir todos los diferentes tipos de elementos finitos, que son inmensos y tan especializados que están más allá de los límites de este estudio.

Método de elemento finito

La formulación de elementos finitos del problema da como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas para su solución [2]. Estos métodos numéricos producen valores aproximados de las incógnitas en números discretos de puntos en el continuo. Por lo tanto, este proceso de modelar un cuerpo dividiéndolo en un sistema equivalente de cuerpos o unidades pequeñas (elementos finitos) interconectados en puntos comunes a dos o más elementos (puntos nodales) se le llama discretización [4].

Los nodos generalmente se encuentran en los límites del elemento, donde se conectan con elementos adyacentes. Además de los nodos de límite, un elemento puede tener algunos nodos interiores. La naturaleza de la solución y el grado de aproximación dependen del tamaño y número de los elementos utilizados.

En el método de elementos finitos (FEM), los elementos tipo "Shell" se pueden utilizar para obtener resultados efectivos. El utilizar este tipo de elementos puede conducir a un gran ahorro de tiempo computacional, ya que permite modelar características delgadas con menos elementos de malla. Los elementos tipo "Shell" también presentan facilidad de mallado y son menos propensos a errores jacobianos negativos que pueden ocurrir cuando se utilizan características sólidas extremadamente delgadas [11]. Los elementos tipo carcasa (Shell) se utilizan para modelar estructuras en las que una dimensión, el espesor, es significativamente menor que las otras dimensiones. Los elementos de carcasa convencionales utilizan esta condición para discretizar un cuerpo definiendo la geometría en una superficie de referencia. En este caso, el espesor se define mediante la definición de una propiedad de la sección geométrica.

Un modelo sólido es un elemento estándar donde el material está representado en todo el componente/estructura. Un elemento tipo "Shell" es hueco en el interior y modela el "caparazón" exterior. Los elementos tipo "Shell" son una simplificación matemática de sólidos de forma especial. Los elementos tipo "Shell" (como las vigas delgadas) no consideran la tensión en la dirección perpendicular a la superficie de la carcasa. Las carcasas gruesas (como las vigas gruesas) pueden considerar las tensiones a través del espesor de la cáscara, en la dirección normal a la superficie media, y dar cuenta de la deformación por cortante.

Los elementos sólidos "3D" son los mayormente utilizados en piezas que su geometría no es regular o compleja. Detallando más la forma geometría. En este tipo de

elemento se pueden visualizar y analizar los esfuerzos y tensiones en cualquiera de sus direcciones.

Las placas/láminas son elementos estructurales planos, cuyo espesor es menor que las otras dos dimensiones; las cuales, son clasificadas en función de la relación entre el espesor y la dimensión característica. Una placa se define como delgada si cumple t/dim característica $< 1/20$; o placa gruesa, en caso contrario.

En el método de elementos finitos (FEM), existen diversas estrategias a seguir, que permiten obtener los resultados deseados. El modelado más sencillo y menos costoso computacionalmente, frente a otras técnicas es la utilización de elementos tipo Shell. Los elementos tipo shell también presentan facilidad de mallado y son menos propensos a errores jacobianos negativos que pueden ocurrir cuando se utilizan características sólidas extremadamente delgadas [11].

Shell convencional: Discretizan el sólido definiendo la geometría sobre una superficie de referencia, definiéndose el espesor en las propiedades de la sección. Como grados de libertad constan de tres traslaciones y dos/tres giros, dependiendo del tipo de elemento.

Shell continuo: Respecto a las placas convencionales, se discretiza el sólido completo en tres dimensiones, con lo cual, el espesor viene determinado por la propia geometría. Además, solo disponen de grados de libertad en traslaciones. Sin embargo, cuentan con una gran ventaja frente a las anteriores, ya que proporcionan estimaciones de las tensiones transversales.

El modelado de los elementos continuos se realiza de igual modo que el modelado de sólidos continuos tridimensionales, aunque las ecuaciones constitutivas son similares a las ecuaciones de láminas convencionales. Las diferencias entre ambos modelados shell se muestran en la Figura 1.

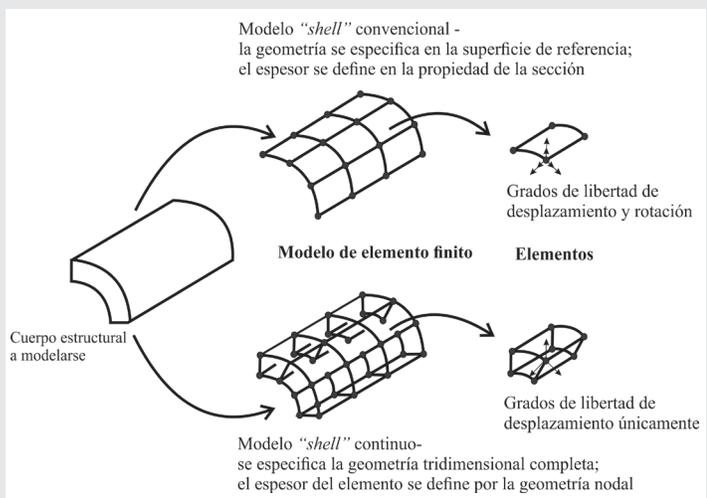


Figura 1.- Comparación de los Elementos Tipo Shell

Tabla 1.- Comparación de elementos shell

Elemento	Nodo	Tipo	Puntos de Integración	Grados de libertad por nodo
C3D8	8	Lineal	8	3
C3D8R	8	Lineal	1	3
C3D20	8	Cuadrático	27	3
D3D20R	20	Cuadrático	8	3

Otras características de los diferentes tipos de elementos shell se enlistan a continuación:

- El elemento cuadrático por defecto (S8R) no es adecuado para problemas de placa delgada.
- El elemento lineal es menos costoso computacionalmente.
- El elemento S4R5 sólo es recomendable en problemas de placa delgada. Consta de un grado de libertad menos por nodo (tres traslaciones y dos rotaciones) respecto de los demás elementos shell convencionales.
- Los elementos S4R, S4 y SC8R son válidos para problemas de placa delgada y gruesa.
- El uso de la integración reducida permite reducir el tiempo computacional, para ello se reduce el número de puntos de integración en cada elemento. En la Figura 2 se aprecia la posición, número de nodos y puntos de integración de los elementos mencionados.

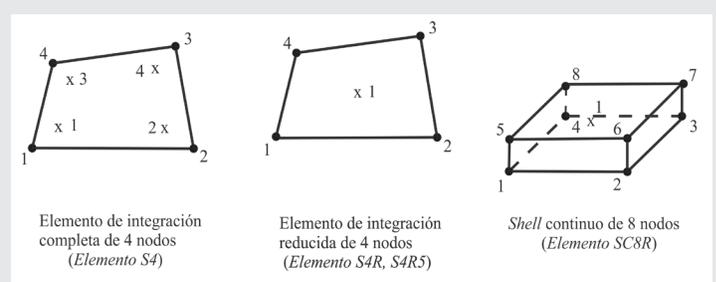


Figura 2.- Puntos de Integración para Diversos Elementos Shell

Otra técnica para la realización del modelo, consiste en la utilización de elementos sólidos. La ventaja fundamental respecto de los anteriores, radica en la obtención directa de las tensiones transversales. Sin embargo, la utilización de esta técnica supone mayor tiempo computacional. En cada nodo existen tres grados de libertad, correspondientes a las tres traslaciones de un problema tridimensional. En la Tabla 2 se muestra una comparativa de los diferentes tipos de elementos sólidos:

Tabla 2.- Comparación de elementos sólidos

Elemento	Nodo	Tipo	Puntos de Integración	Grados de libertad por nodo
S4	4	Convencional	4	6
S4R	4	Convencional	1	6
S4R5	4	Convencional	1	5
SC8R	4	Continuo	1	3

Otras características de los diferentes tipos de elementos sólidos se enlistan a continuación:

- En elementos reducidos de primer orden, C3D8R, puede aparecer el problema de Hourglass. Se hace necesaria la implementación de rigidez artificial que evite este tipo de desplazamiento sin esfuerzo.

- Los elementos con integración completa no sufren Hourglass, pero son sensibles a sufrir comportamiento de bloqueo (volumétrico y cortante). El bloqueo a cortante da lugar a esfuerzos cortantes ficticios, por lo que los elementos se hacen muy rígidos a flexión. El bloqueo volumétrico, da lugar a tensiones de presión ficticias, provocando un comportamiento demasiado rígido ante deformaciones que no deberían ocasionar cambios de volumen.

Análisis teórico de esfuerzo en vigas

En mecánica de sólidos se han introducido numerosas teorías para el modelado estructural y el análisis de vigas. La teoría de vigas, tiene un papel importante en el análisis estructural porque proporciona una simple herramienta para analizar numerosas estructuras [12].

Con la finalidad de tener otra referencia comparativa a los resultados numéricos, se obtuvieron resultados de manera analítica utilizando las ecuaciones de deflexión de vigas, para el caso particular “viga en voladizo” [13].

Las ecuaciones para representar los esfuerzos normales en flexión en vigas rectas se basan en los siguientes supuestos [14]:

- La viga se somete a flexión pura; esto significa que la fuerza cortante es nula.
- El material es isotrópico y homogéneo.

La viga es recta, con una sección transversal constante en toda su longitud.

- La viga tiene un eje de simetría en el plano de flexión.

En la Figura 3 se presenta el diagrama de cuerpo libre de la viga analizada.

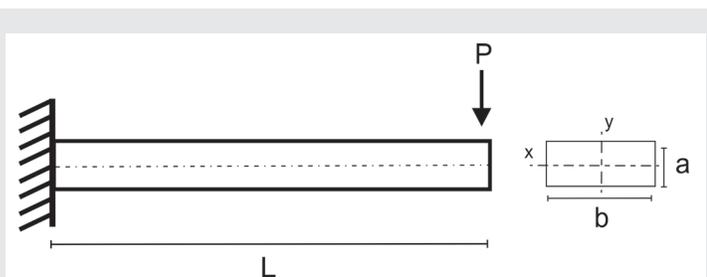


Figura 3.- Diagrama de cuerpo libre para una viga en voladizo

Para obtener la deflexión máxima ocasionada por una carga en el extremo libre se utilizó la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \tag{Ec. (1)}$$

Donde P representa la carga en el extremo libre, L la longitud de la viga, I el segundo momento de área y E el módulo de elasticidad.

Con lo que respecta al esfuerzo máximo en la viga debido a la flexión, se utilizó la siguiente expresión:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \tag{Ec. (2)}$$

Donde M representa el momento de flexión ocasionado por la carga en el extremo libre, I el segundo momento de área y c es la distancia del eje neutro a la superficie donde se aplica la carga.

La viga analizada en el transcurso de todo el trabajo será de material aluminio 6063-T5, con propiedades mostradas en la Tabla 3. Teniendo una longitud total de 440 mm, siendo sujetado por 40 mm en un extremo, cuenta con un espesor de 6 mm y 50 mm de ancho.

Tabla 3.- Propiedades mecánicas del aluminio 6063-T5[11].

Propiedades	Valor
Módulo de elasticidad [MPa]	66940
Densidad [$\frac{Kg}{m^3}$]	2700
Coefficiente de poisson	0.33

Una viga es considerada corta, cuando la proporción $L/h < 15$ [16], si esta condición no se cumple, se omite el efecto de los esfuerzos cortantes en la deformación provocada por el momento de flexión aplicado. Para el planteamiento del sistema, se considera la deformación provocada por flexión pura [16].

Con las propiedades y dimensiones del aluminio, se sustituyen en las ecuaciones 1 y 2 para obtener la deformación y el esfuerzo máximos.

$$\delta = \frac{(100N)(400mm)^3}{3(66940MPa)(900mm^4)} \tag{Ec. (3)}$$

$$\sigma = \frac{(100N)(400mm)(3mm)}{900mm^4} \tag{Ec. (4)}$$

La Tabla 4 presenta los resultados obtenidos mediante las ecuaciones 3 y 4.

Tabla 4.- Resultados analíticos para la viga de voladizo.

Parámetro	Valor
Deformación máxima [mm]	35.41
Esfuerzo máximo [MPa]	133.33

Análisis numérico de esfuerzo en vigas

Se realizaron dos modelos discretos utilizando el software Abaqus, el primero está constituido de elementos sólidos 3D, mientras que el segundo está constituido por elementos tipo “Shell”. Los modelos se validaron con los resultados obtenidos teóricamente. La descripción del modelo se presenta a continuación.

Ambos modelos representan una viga de sección cuadrada en voladizo, en la cual se realiza el empotramiento en una partición al extremo de la viga, como se muestra en la Figura 4.

El tiempo que tarda el análisis en concluir (tiempo de cómputo), depende de diversos aspectos que conforman el modelo, como son, las condiciones de frontera, la cantidad de nodos, los materiales empleados, el tipo de resolución, entre otros [17]. Estas características definen la complejidad del modelo, de igual manera, las especificaciones del equipo de cómputo donde se realizan las simulaciones, como son, el procesador, memoria RAM, entre otros, influyen en el tiempo de resolución. Este trabajo se realizó con un procesador Core i3 10th Gen con gráficos integrados y 8GB de memoria RAM.

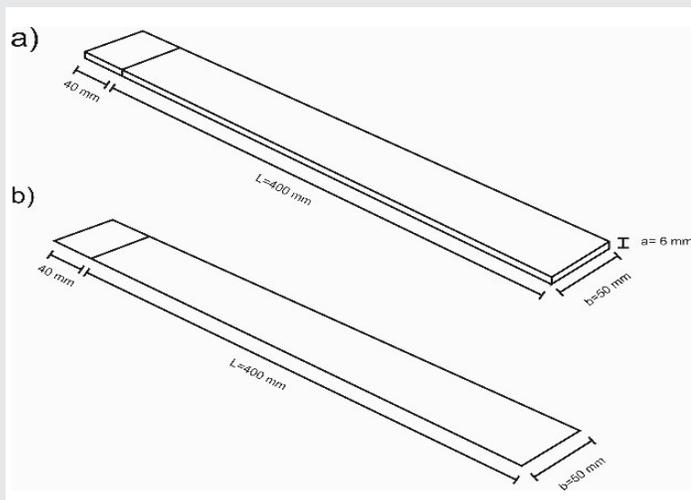


Figura 4.- Dimensiones de la viga, donde a) viga con elementos sólidos 3D, b) viga con elementos tipo "Shell"

Modelo discreto con elementos tipo shell

El modelo discreto de la viga se considera como material deformable utilizando elementos S4R (Shell con 4 nodos, método de integración Reducida). En la Figura 5 se presentan las condiciones de frontera del modelo discreto, las cuales consisten en el empotramiento de un extremo de la viga y una carga en el extremo opuesto.

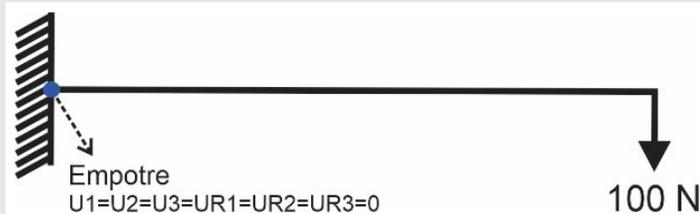


Figura 5.- Condiciones de frontera considerando elementos tipo "Shell"

Se realizó un análisis de convergencia de malla para obtener un tamaño apropiado de elementos, el cual, resolviera satisfactoriamente la problemática teniendo como referencia los resultados obtenidos analíticamente y comparando los tiempos de cómputo. En la Figura 6 se muestran los tamaños de malla de 1 mm, 2 mm, 4 mm y 6mm.

Tamaños de malla

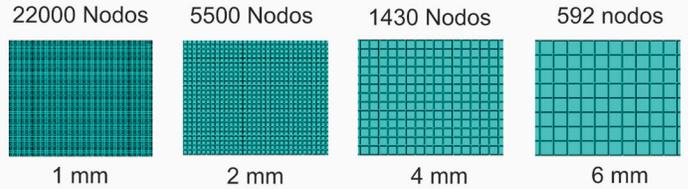


Figura 6.- Tamaños de malla

En la Figura 7 se muestra la distribución de esfuerzos de Von mises con una malla de 4 mm.

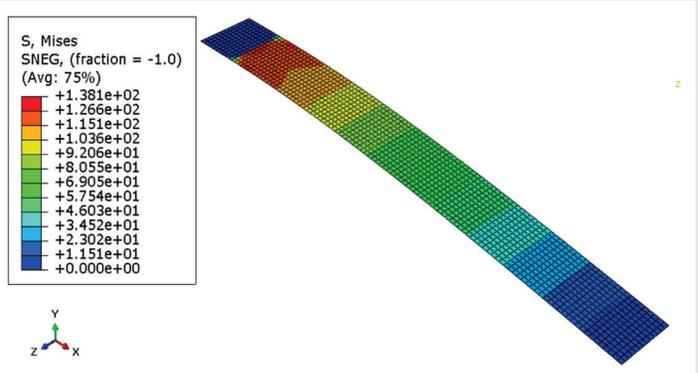


Figura 7.- Distribución de esfuerzos de Von Mises

En la Tabla 5 se muestra la comparación de la deformación máxima, el esfuerzo máximo y el tiempo de cómputo para cada tamaño de malla analizado.

Tabla 5.- Comparación de resultados para diferentes tamaños de malla

Tamaño de malla	Numero de Nodos	Deformación [mm]	Esfuerzo máximo [MPa]	Tiempo de cómputo [s]
1 mm	22000	34.96	141.9	24
2 mm	5500	34.96	140.6	11
4 mm	1430	34.96	138.1	11
6 mm	592	34.95	135.6	11

Modelo discreto con elementos tipo shell

El modelo discreto considerando elementos C3D8R (desplazamiento/esfuerzo Continuo, elemento 3D, 8 Nodos, integración Reducida), considerando la viga como elemento deformable. En la Figura 8 se presentan las condiciones de frontera del modelo discreto, las cuales consisten en el empotramiento de un extremo de la viga y una carga en el extremo opuesto.



Figura 8.- Condiciones de frontera considerando elementos tipo "3D"

Se realizó un análisis de convergencia de malla para obtener un tamaño apropiado de elementos, el cual, resolviera satisfactoriamente la problemática teniendo como referencia los resultados obtenidos analíticamente y comparando los tiempos de cómputo.

Una consideración importante cuando se malla un elemento sólido es la cantidad de elementos en cada cara, principalmente en elementos tipo viga. En la Figura 9 se muestra la viga en modelo 3D con solo 2 nodos de espesor y cuando tiene 5 nodos.

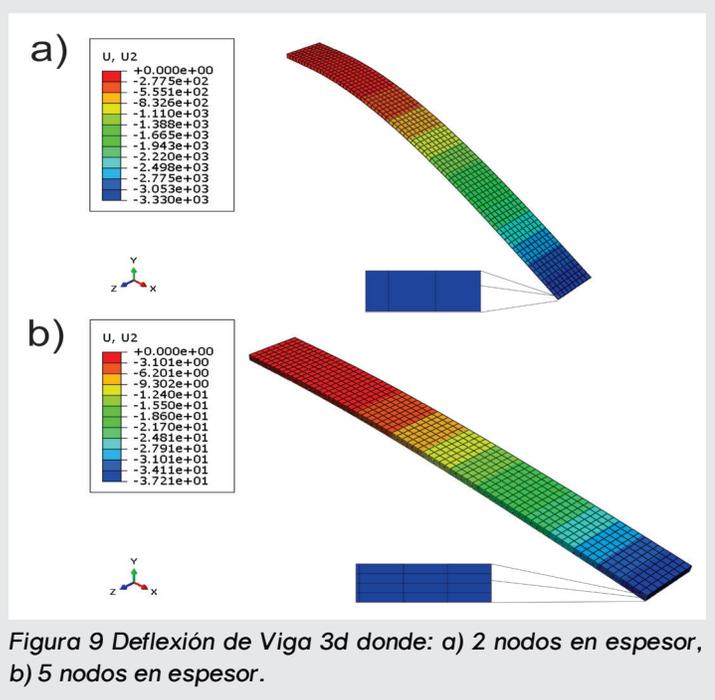


Figura 9 Deflexión de Viga 3d donde: a) 2 nodos en espesor, b) 5 nodos en espesor.

En la Figura 9 se muestra la deflexión de la viga, donde aún con las mismas condiciones de frontera y de carga para ambos casos, el valor máximo difiere, y esto se debe a la cantidad de nodos en el espesor de la viga. Utilizando 2 nodos en el espesor de la viga, la deformación máxima es de 3,330 mm, utilizando 5 nodos, la deformación máxima tiene valor de 37.21 mm, lo cual, presenta una diferencia porcentual de aproximadamente 5.08% con respecto a los resultados analíticos.

En la Figura 10 se muestra el tamaño del mallado en elementos sólidos, el cual se varía el espesor de los nodos teniendo 2 nodos de espesor, hasta los 6 nodos de espesor.

Tamaño de la malla				
4 mm	4 mm	4mm	4mm	4mm
2 espesor de nodo	3 espesor de nodo	4 espesor de nodo	5 espesor de nodo	6 espesor de nodo

Figura 10.- Tamaños de malla de elementos 3D

En la Tabla 6 se muestra el análisis de convergencia de malla, considerando únicamente el número de nodos en el espesor de la viga.

Derivado de lo anterior, todos los modelos que utilizan elementos sólidos contarán con 6 nodos en el espesor y las variaciones serán en la longitud de la viga.

Tabla 6.- Comparación de resultados para diferentes cantidades de nodos en el espesor

Tamaño de malla	Numero de nodos	Deformación [mm]	Esfuerzo máximo [MPa]	Tiempo de cómputo [s]
4 mm	2	3330	90.1	10
4 mm	3	39.24	100.7	10
4 mm	4	37.23	105.3	10
4 mm	5	37.21	109.7	11
4 mm	6	35.91	112.7	13

En la Tabla 7 se muestra la comparación de la deformación máxima, el esfuerzo máximo y el tiempo de cómputo para cada tamaño de malla analizado.

Tabla 7.- Comparación de resultados para diferentes tamaños de malla.

Tamaño de malla	Numero de nodos	Deformación [mm]	Esfuerzo máximo [MPa]	Tiempo de cómputo [s]
1 mm	132000	35.95	161.9	51
2 mm	33000	35.93	115.5	19
4 mm	8580	35.91	112.7	13
6 mm	3552	35.87	110.3	11

DISCUSIÓN

En la Tabla 8 se muestra la comparación de resultados obtenidos, para cada análisis realizado.

En los resultados de deformación máxima se observa una diferencia del 1.24% entre el análisis analítico y el realizado con elementos tipo "Shell"; mientras que, la diferencia porcentual entre el análisis analítico y el realizado con elementos sólidos, es del 1.55%.

En los resultados de esfuerzo máximo se observa una diferencia del 5.45% entre el análisis analítico y el realizado con elementos tipo "Shell"; mientras que la diferencia porcentual entre el análisis analítico y el realizado con elementos sólidos, es del 13.37%.

Tabla 8.- Comparación de los resultados obtenidos para los diferentes modelos analizados

	Analítico	Shell	3D
Deformación [mm]	35.4	34.9 6	35.93
Esfuerzo máximo [MPa]	133.33	140. 6	115.5
Tiempo de cómputo [s]	----	11	19
Tamaño de malla [mm]	----	2	2
Numero de nodos	----	5500	33000

CONCLUSIONES

El tiempo de cómputo se ve afectado cuando el tamaño de la malla aumenta.

Para un mismo tamaño de malla, el tiempo de cómputo puede variar 50%, siendo que, para un modelo sólido es mayor, con respecto a utilizar elementos tipo "Shell".

Para el modelado de vigas utilizando elementos sólidos 3D, es importante el número de nodos en el espesor de la geometría, siendo necesario tener como mínimo 3 elementos, ya que, esto influye directamente a los resultados, presentando diferencias porcentuales de 100%.

Para el modelado de vigas utilizando elementos tipo "Shell", no se presentó variación en los resultados de deformación máxima con respecto al tamaño de malla, sin embargo, los esfuerzos máximos si muestran diferencia.

Utilizar elementos tipo "Shell" toma relevancia, si el modelo aumenta su complejidad, debido a que se reduce el tiempo de cómputo considerablemente, teniendo buenos resultados con respecto a los analíticos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] S. Cen, C. Li, S. Rajendran, and Z. Hu, "Advances in finite element method," *Math. Probl. Eng.*, vol. 2014, no. March 2015, 2014, doi: 10.1155/2014/206369.

[2] L. L. Otero Pereiro, "Aprendiendo sobre el Método de los Elementos Finitos," *Rev. Ing. Mecánica*, vol. 9, no. Aprendiendo sobre el Método de los Elementos Finitos, p. 12, 2006, [Online]. Available: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=225117945001>.

[3] D. Logan, *A first course in the finite element method*, vol. 3, no. 2. 2007.

[4] V. Jagota, A. P. S. Sethi, and K. Kumar, "Finite element method: An overview," *Walailak J. Sci. Technol.*, vol. 10, no. 1, pp. 1-8, 2013, doi: 10.2004/wjst.v10i1.499.

[5] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method Volume 1 : The Basis*, vol. 1. 2000.

[6] I. A. Magomedov and Z. S. Sebaeva, "Comparative study of finite element analysis software packages," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1515, no. 3, 2020, doi: 10.1088/1742-6596/1515/3/032073.

[7] Geoffrey Modlen, "Introduction to Finite Element Analysis." pp. 1-93, 2010.

[8] P. Silori, A. Shaikh, K. C. Nithin Kumar, and T. Tandon, "Finite Element Analysis of Traction Gear Using ANSYS," *Mater. Today Proc.*, vol. 2, no. 4-5, pp. 2236-2245, 2015, doi: 10.1016/j.matpr.2015.07.243.

[9] A. Dutt, "Effect of Mesh Size on Finite Element Analysis of Beam," *Int. J. Mech. Eng.*, vol. 2, no. 12, pp. 8-10, 2015, doi: 10.14445/23488360/ij-me-v2i12p102.

[10] C. M. Wai, A. Rivai, and O. Bapokutty, "Modelling optimization involving different types of elements in finite element analysis," *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, vol. 50, no. 1, 2013, doi: 10.1088/1757-899X/50/1/012036.

[11] A. J. Sadowski and J. M. Rotter, "Solid or shell finite elements to model thick cylindrical tubes and shells under global bending," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 74, no. October 2017, pp. 143-153, 2013, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.05.008.

[12] O. Bachau and J. Craig, "Structural analysis, with applications to aerospace structures," in *Structural analysis, with applications to aerospace structures*, vol. 79, no. 23, D. of C. Engineering, Ed. War-teloo, Ontario, Canada: Springer, 2001, p. 10.

[13] V. Popov, "Contact mechanics and friction: physical principles and applications," Springer, Ed. 2010, pp. 133-174.

[14] K. Budynas and G. Richard, "Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley," *Igarss 2014*, no. 1, pp. 1-5, 2014, doi: 10.1007/s13398-014-0173-7.2.

[15] E. Quirino et al., "Numerical simulations of sandwich structures under lateral," vol. 15, no. 2, pp. 31-41, 2019, doi: 10.23743/acs-2019-11.

[16] J. Sotomayor, "Comportamiento en flexión estática de vigas de madera antigua de Picea abies," *Rev. Investig. la Univ. la Salle Bajío*, vol. 7, pp. 208-227, 2014.

[17] F. Figueroa, E. Ramirez, O. Ruiz, and A. Ortiz, "Modelado Y Análisis Del Proceso De Extrusión Inversa En Frío Mediante Paquetería De Elemento Finito," no. January 2016, 2010.